

4 Die Währungsreform

Autor: Falk Ebert (MATHEON)

4.1 Aufgabe

Zählen wird immer schwieriger und der Einzelhandel baut schon darauf, dass viele Leute sich beim Bezahlen verzählen. Damit soll jetzt Schluss sein. Sämtliche Münzwerte unter 1 €, die es aktuell gibt (also 1ct, 2ct, 5ct, 10ct, 20ct, 50ct), werden über den Haufen geworfen. Es sollen neue Münzen geprägt werden. Die Münzwerte sollen so sein, dass man alle Preise zwischen 1ct und 98ct mit *maximal zwei* dieser neuen Münzwerte bezahlen kann. Die Schwellenpreise von 99ct werden abgeschafft. Wieviele Münzwerte muss es dann minimal geben?

4.2 Lösung

Richtige Antwort: 16 Münzen, geringste Summe: 403

Jetzt ist es heraus. Es geht nicht mit weniger als 16 Münzen. Und das Ergebnis ist auch schon seit etwa 30 Jahren bekannt. Näheres dazu kann man zum Beispiel unter <http://oeis.org/A001212> finden. In der dort angegebenen Zahlenfolge ist der 15. Eintrag die 92 und der 16. die 104. Das heißt konkret, dass man mit 15 Münz- oder Briefmarkenwerten maximal die Summen von 1 bis 92 erreichen kann. Mit 16 Werten kann man auch die Summen von 1 bis 104 darstellen. Weniger als 16 Werte funktionieren also auf keinen Fall. Wenn man diese Zusatzinformation nicht hat, kann man den Suchbereich aber auch einschränken. Im Interview wurde gesagt, dass es auf keinen Fall mit weniger als 10 Münzwerten funktionieren kann, weil man ja mit 2 Münzen maximal $10 \cdot 10 = 100$ Zweierkombinationen und 10 Werte allein hat. Bei 9 Münzwerten kommt man mit dieser Argumentation auf $9 \cdot 9 + 9 = 90$ Kombinationen und kann damit auf keinen Fall 98 verschiedene Werte abdecken. Wie viele richtig festgestellt haben, kann man diesen Gedankengang noch weiter verfolgen. Unter den 110 Kombinationen mit 10 Münzen sind natürlich auch solche wie $a + b$ und $b + a$ dabei. Die Kommutativität der Ad-

dition verringert die Anzahl der *verschiedenen* Summen von n Münzwerten auf $\frac{n(n+1)}{2} + n$. Dieser Term liegt für $n = 12$ bei 90 und erst bei $n = 13$ über 98. Damit kommen für die Anzahl der Münzwerte also nur Werte zwischen 13 und 16 in Frage. Auch bei 13 kann man noch recht schnell ausschließen. Der Gedankengang dazu ist der folgende. Zwischen 1 und 98 gibt es genau 49 ungerade Zahlen. Diese lassen sich nur als ungerader Münzwert oder als Summe eines geraden und eines ungeraden Münzwertes darstellen. Zählen wir mal die 0 kurz als geraden Münzwert mit, dann geht *nur* die Kombination gerader+ungerader Wert. Wenn wir also N_g gerade (inklusive 0) und N_u ungerade Münzwerte haben, dann müssen sich daraus $N_g \cdot N_u \geq 49$ verschiedene Kombinationen bilden lassen. Das Minimum von 49 wird nur erreicht mit $N_u = N_g = 7$ und weil wir die 0 bei den geraden Zahlen mitgezählt haben, sind das wieder 13 Münzwerte - allerdings nur, wenn keine ungerade Zahl sich auf zwei oder mehr verschiedene Arten darstellen lässt. Jeder Münzwert muss zwischen 1 und 49 liegen, weil er sonst gar nicht zu den Kombinationen für die 49 ungeraden Zahlen beitragen kann. Hinzu kommt, dass einige der Münzwerte auch schon vergeben sind. Beispielsweise ist die 1 mit dabei, weil sich sonst 1 nicht als Summe darstellen lässt. Die 49 ist dabei, weil das der einzige Wert ist, mit dem sich die 98 als $49 + 49$ darstellen lässt. Dementsprechend, da kein Münzwert größer als 49 ist, kann die 97 auch nur als $48 + 49$ dargestellt werden. Damit sind die Münzwerte 1, 48 und 49 verpflichtend und man sieht, dass 49 sowohl als 49 allein, als auch als $48 + 1$ dargestellt werden kann. Damit war es das mit der eindeutigen Darstellung und es können auch keine 13 Münzwerte sein.

Jetzt hat man also nur noch die Fälle 14, 15 und 16 Münzwerte zu prüfen. Das macht immer noch genug Aufwand. Viele - und wahrscheinlich alle erfolgreichen Sucher - haben diese Aufgabe einem Computer übertragen. Selbst dann musste man noch $\binom{98}{14} + \binom{98}{15} + \binom{98}{16} \approx 10^{18}$ Möglichkeiten durchprobieren. Zum Vergleich: die deutsche Staatsverschuldung liegt zur Zeit bei etwa $2 \cdot 10^{15}$ Cent, also einer etwa um den Faktor 500 kleineren Zahl. Man kann sich und dem Computer die Suche aber erleichtern. Die 1 muss nach wie vor immer dabei sein. Das macht noch nicht viel aus, ist aber ein Anfang. Das Prüfen, ob alle ungeraden Zahlen gebildet werden können, macht bereits einen großen Unterschied, weil man die geraden und ungeraden Zahlen separat betrachten kann, und das jeweils deutlich besser handhabbare Mengen sind. Viele weitere gute Vorschläge waren unter den Einsendungen.

So kann beispielsweise bei jedem Hinzufügen eines neuen Münzwertes zu einer zu testenden Menge geprüft werden, ob mit den noch verbleibenden, möglichen Münzwerten überhaupt alle noch fehlenden Summen gebildet werden können.

Schlussendlich lief es zwar auf Probieren hinaus. Mit intelligentem Probieren konnte aber ein gewöhnlicher PC alle Lösungen innerhalb von weniger als einer Stunde bestimmen. Der Computer wird bestätigen, dass es keine Lösung mit 14 oder 15 Münzen gibt. Mit 16 Münzen findet man aber ganze 62 Lösungen. Siehe dazu die folgende Tabelle. Erst damit findet man auch die Lösung mit der kleinsten Münzsumme, nämlich 403. Es wurden noch andere interessante Dinge herausgefunden, zum Beispiel, dass die absolut kleinste Summe von Münzwerten, mit denen die Summen 1 bis 98 dargestellt werden können, ist 362. Diese Gesamtsumme wird aber nur mit 20 Münzwerten erreicht.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass diese von mir falsch gestellte Aufgabe einige sehr angeregte Diskussionen (<http://forum.mathekalender.de/index.php?page=Thread&threadID=949>) ausgelöst und vielen sicherlich auch einiges Kopfzerbrechen bereitet hat. Ich hatte viel Freude beim Lesen aller guten Ideen und Lösungsgedanken, dass ich mich auch nicht mehr ganz so sehr schäme, diese Aufgabe überhaupt gestellt zu haben. Vielen Dank und herzlichen Glückwunsch an den Gewinner des ersten Adventsrätsels des Jahres 2011.

Falk Ebert

Münzwerte														Summe
1, 2, 3, 4, 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	403													
1, 2, 3, 4, 8, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	406													
1, 2, 4, 5, 9, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	409													
1, 3, 4, 5, 8, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	409													
1, 2, 4, 7, 9, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	411													
1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 30, 31, 63, 65, 67	412													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	412													
1, 3, 4, 9, 10, 15, 16, 21, 22, 27, 28, 30, 31, 63, 65, 67	412													
1, 2, 3, 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 46, 47, 48, 50	413													
1, 3, 4, 8, 9, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	413													
1, 3, 4, 8, 10, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	414													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 23, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	415													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 29, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	418													
1, 3, 4, 7, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 46, 47, 48, 50	418													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 39, 41, 45, 46, 48, 49	419													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 40, 41, 45, 46, 48, 49	420													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 35, 41, 44, 45, 46, 48, 49	421													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 49	422													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 40, 44, 45, 47, 48, 49	424													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 44, 45, 46, 48, 49	424													
1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49, 50	425													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 43, 46, 47, 48, 51	427													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 45, 46, 47, 48, 49	427													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 35, 41, 45, 46, 48, 49, 53	430													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 42, 44, 46, 47, 49, 51	430													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 43, 44, 46, 47, 48, 51	430													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 45, 46, 47, 48, 49	430													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 29, 35, 41, 45, 46, 48, 49, 59	433													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 45, 47, 48, 49, 52	436													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 46, 47, 48, 49, 51	436													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 46, 47, 49, 51, 54	442													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 46, 48, 49, 51, 53	442													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 47, 48, 49, 51, 52	442													
1, 3, 4, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 28, 29, 31, 60, 61, 66, 67	446													
1, 3, 5, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 28, 29, 31, 60, 61, 66, 67	447													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 59, 62, 65, 68	449													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 30, 32, 59, 60, 65, 66	449													
1, 3, 4, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 28, 29, 31, 61, 62, 67, 68	450													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 25, 28, 29, 30, 61, 63, 66, 68	451													
1, 3, 5, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 28, 29, 31, 61, 62, 67, 68	451													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 60, 63, 66, 69	453													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 61, 63, 66, 68	453													
1, 2, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 25, 28, 29, 30, 61, 63, 66, 68	453													
1, 3, 5, 6, 13, 15, 17, 24, 25, 27, 29, 30, 61, 62, 67, 68	453													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 47, 48, 49, 57, 58	454													
1, 2, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 61, 63, 66, 68	455													
1, 3, 5, 6, 13, 14, 21, 22, 26, 29, 32, 35, 59, 61, 63, 65	455													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 28, 29, 30, 61, 64, 67, 70	457													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 30, 32, 63, 64, 65, 66	457													
1, 2, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 30, 32, 63, 64, 65, 66	459													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 45, 46, 48, 49, 80	460													
1, 2, 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 30, 32, 63, 65, 66, 68	461													
1, 2, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 29, 30, 32, 63, 65, 66, 68	463													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 45, 46, 48, 49, 84	464													
1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 41, 45, 46, 48, 49, 85	465													
1, 3, 4, 7, 9, 15, 16, 18, 19, 22, 39, 44, 49, 69, 74, 79	468													
1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 22, 24, 42, 44, 49, 65, 72, 73	469													
1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 21, 22, 45, 47, 49, 71, 73, 75	481													
1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 21, 22, 45, 47, 49, 72, 74, 76	484													
1, 3, 4, 7, 8, 9, 16, 17, 21, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 90	485													
1, 2, 5, 6, 8, 13, 14, 17, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89	498													
1, 3, 4, 6, 8, 12, 17, 19, 25, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89	508													