Lösung

Frage A: 10
Frage B: 16796

Lösungsweg von Frage A

Da keine Glasplatten auf vier Stangen gleichzeitig befestigt werden können, werden ausschließlich dreieckige Platten verwandt. Daher wird **Frage A** zu:

> Wie viele dreieckige Platten benötigt man, um einen 12-eckigen Platz zu überdachen?

Man kann es einfach ausprobieren und ein 12-Eck durch Einzeichnen von Diagonalen zerlegen und erhält 10 Dreiecke. Beweisen kann man das mit Induktion.

Behauptung:

Ein n-Eck kann in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt werden.

Induktionsanfang:

- $n = 3$: Das Dreieck wird in $3 - 2 = 1$ Dreiecke zerlegt.
- $n = 4$: Das Viereck wird in $4 - 2 = 2$ Dreiecke zerlegt.

Induktionsvoraussetzung:

Für k-Ecke mit $3 \leq k \leq n$ gilt die Behauptung.

Induktionsbehauptung:

Die Aussage gilt dann auch für $n + 1$.

Beweis des Induktionsschrittes:

In einer Zerlegung eines $(n+1)$-Ecks in Dreiecke gibt es eine Diagonale. Diese zerlegt das $(n + 1)$-Eck in zwei kleinere Polygone, ein r-Eck und ein l-Eck mit $r \leq n$ und $l \leq n$. Es gilt $r + l = (n+1) + 2$, da die Enden der Diagonalen doppelt gezählt werden (die Diagonale ist sowohl Seite eines Dreiecks des

r-Ecks als auch des l-Ecks). Die Zerlegung des r- bzw. l-Ecks besteht nach Induktionsvoraussetzung aus $r-2$ bzw. $l-2$ Dreiecken. Also ist die Anzahl der Dreiecke in der Zerlegung des $(n+1)$-Ecks:

$$(r-2)+(l-2)=r+l-4=(n+1)+2-4=(n+1)-2.$$

Lösungsweg von Frage B:

Geschichtliches

Entdeckt (besser gesagt: erstmals als Lösung eines Problems dokumentiert) wurden die Catalan-Zahlen von Leonhard Euler[1]. Er versuchte, eine allgemeine Formel für folgendes Problem zu finden:

> **Bestimme die Anzahl der Dreieckszerlegungen eines konvexen $(n+2)$-Ecks durch $n-1$ sich nicht schneidende Diagonalen.** [...]

Ihren Namen haben sie nach Eugène Catalan (1814-1894), einem belgischen Mathematiker [...].[2]

Beweisidee der Formel

Man muss hier abermals das n-Eck zerlegen. Diesmal nimmt man nicht eine Diagonale, sondern ein Dreieck, um es zu zerlegen. Wähle dazu zunächst ein **feste** Kante des äußeren n-Ecks. In jeder Zerlegung des n-Ecks in Dreiecke liegt die gewählte Kante in einem Dreieck, das von der gewählten Kante und einer nicht auf der Kante liegenden Ecke des n-Ecks gebildet wird. Von dieser Art Dreieck – gewählte Kante mit anderer Ecke – gibt es genau $(n-2)$ Stück. Diese Dreiecke zerlegen das n-Eck

- entweder in das gewählte Dreieck und ein $(n-1)$-Eck,
- oder in ein k-Eck, das gewählte Dreieck und ein $(n-k+1)$-Eck. [3]

Somit erhält man $n-2$ disjunkte Familien von Zerlegungen. Da in jeder Zerlegung des n-Ecks genau ein Dreieck die gewählte Kante enthält, kann

[1] Leonhard Euler (1707 - 1783) war einer der bedeutendsten Mathematiker.
[2] Zitiert nach: http://matheplanet.com
[3] Analog zum Vorgehen bei Frage A wird hier eine Ecke doppelt gezählt.

man jede Zerlegung eindeutig einer der Familien zuordnen – somit geht keine verloren und keine wird doppelt gezählt. Bezeichne nun mit $Z(n)$ die Anzahl der Zerlegungen eines n-Ecks in Dreiecke. Die Anzahl der Zerlegungen, die aus dem gewählten Dreieck und einem $(n-1)$-Eck bestehen ist also $Z(n-1)$, die Anzahl der Zerlegungen, die aus einem k-Eck, dem gewählten Dreieck und einem $(n-k+1)$-Eck bestehen ist $Z(k) \cdot Z(n-k+1)$, da man jede Zerlegung des k-Ecks mit jeder Zerlegung des $(n-k+1)$-Ecks zu einer Zerlegung des n-Ecks kombinieren kann.

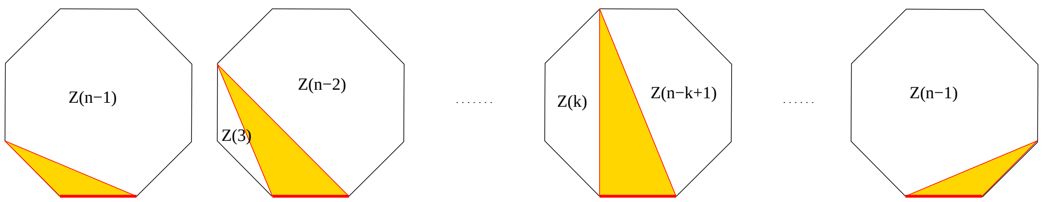

Abbildung 1: Zerlegungen eines n-Ecks in kleinere Polygone mittels speziellen Dreiecken.

Mit dieser Art der Teilung des n-Ecks in kleinere Polygone erhält man für kleine n-Ecke folgende Werte:

$Z(3) = 1$	Ein Dreieck ist ein Dreieck!
$Z(4) = Z(3) + Z(3) = 2$	Es gibt zwei Familien von Zerlegungen, die jeweils eine Zerlegung enthalten.
$Z(5) = Z(4) + Z(3) \cdot Z(3) + Z(4)$	Es gibt drei Familien: Zwei zerlegen das 5-Eck in ein Dreieck und ein Viereck und eine zerlegt das 5-Eck in drei Dreiecke.

Es resultiert für die Anzahl $Z(n)$ der Zerlegungen eines n-Ecks folgende allgemeine Rekursionsformel (rekursive Bestimmung der Catalan-Zahlen)

$$\begin{aligned} Z(3) &= 1 \\ Z(n) &= Z(n-1) + Z(n-2) \cdot Z(3) + Z(n-3) \cdot Z(4) + \dots \\ &\quad + Z(4) \cdot Z(n-3) + Z(3) \cdot Z(n-2) + Z(n-1) \end{aligned}$$

Für die Catalan-Zahlen gilt $c_n = Z(n+2)$.

Um die Anzahl der Zerlegungen des 12-Ecks zu berechnen, muss man nun noch $Z(k)$ für $k = 3, \ldots, 12$ bzw. $C(l)$ für $l = 1, \ldots, 10$ ausrechnen:

$$\begin{aligned}
Z(3) &= 1 \\
Z(4) &= Z(3) + Z(3) = 1 + 1 = 2 \\
Z(5) &= Z(4) + Z(3) * Z(3) + Z(4) = 2 + 1 + 2 = 5 \\
Z(6) &= Z(5) + Z(4) * Z(3) + Z(3) * Z(4) + Z(5) = 5 + 2 + 2 + 5 = 14 \\
&\vdots \\
Z(12) &= 16796
\end{aligned}$$