Lösung

Richtige Lösung: 3816547290

Sei x_i die i-te Ziffer in der Zahlenkombination des Tresors und somit $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$ die gesamte Kombination.

Teilbarkeitsregeln kann man z.B. nachlesen unter:
http://www.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit

Da $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}$ durch 10 teilbar sein muss, folgt $x_{10} = 0$ und da $x_1x_2x_3x_4x_5$ durch 5 teilbar sein muss und die 0 bereits verwendet wurde, folgt $x_5 = 5$.

Weiterhin wissen wir, dass x_2, x_4, x_6, x_8 und x_{10} gerade Zahlen sein müssen und daher x_1, x_3, x_5, x_7 und x_9 ungerade Zahlen sein müssen.

Mit der Teilbarkeitsregel für die 3 folgt, dass die Quersumme von $x_1x_2x_3$ durch 3 teilbar sein muss. Da x_2 gerade und x_1 und x_3 ungerade und somit $x_1 + x_3$ wieder gerade ist, kommen nur gerade Quersummen in Betracht. Diese sind durch $9 + 8 + 7 = 24$ nach oben und durch $1 + 2 + 3 = 6$ nach unten beschränkt. Somit können, wenn man darüber hinaus berücksichtigt, dass die Ziffern 5 und 0 bereits vergeben sind und keine Ziffern doppelt vorkommen dürfen, für $x_1x_2x_3$ nur folgende Kombinationen stehen:
$987, 789, 981, 189, 963, 369, 927, 729, 783, 387, 381, 183, 741, 147, 921, 723, 327, 321, 123, 129.$

Mit der Teilbarkeitsregel für 4 folgt, dass x_3x_4 durch 4 teilbar sein muss. Für x_3x_4 kommen also nur folgende Kombinationen in Frage:
$12, 16, 32, 36, 72, 76, 92, 96.$

Mit der Teilbarkeitsregel für 8 folgt, dass $x_6x_7x_8$ durch 8 teilbar sein muss. $x_6x_7x_8$ können also nur folgende Kombinationen sein:
$216, 296, 416, 432, 472, 496, 632, 672, 816, 832, 872, 896.$

Nun ermittelt man alle Kombinationen $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$, die mit den Anforderungen des Weihnachtsmannes an die Zahlenkombination konform sind.

Ist zum Beispiel $x_1x_2x_3 = 987$, so kann für x_3x_4 nicht 72 stehen, da dann zweimal die 7 in der Kombination vorkommen würde. Die zulässigen Kombinationen für $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$ sind somit:
98725416, 98765432, 78925416, 78965432, 98165432, 98165472,
18965432, 18965472, 78325416, 78325496, 38725416, 38725496,
38125496, 38165472, 18325496, 18365472, 74125896, 74165832,
14725896, 14765832

Jetzt müssen diese Kombinationen für $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ nur noch auf Teilbarkeit durch 7 überprüft werden.
Dies ergibt die Lösung 3816547290.

Diese Aufgabe finden Sie in:
Prof. Beutelspacher, Albrecht: minus mal minus gibt plus. Mathematische Denkspiele. Augustus Verlag 1997